



УДК: 517.925+517.938.5
MSC 2010: 37J60, 37J35, 70H45

Топологический анализ одной интегрируемой системы, связанной с качением шара по сфере

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

К 50-летию нашего большого друга и замечательного ученого А. В. Болсинова

Рассматривается новая интегрируемая система, описывающая качение твердого тела со сферической полостью по шаровому основанию. Ранее авторами для данной системы было найдено разделение переменных на нулевом уровне линейного (по угловой скорости) первого интеграла, в то время как в общем случае разделить переменные не удастся. В данной работе показано, что слоение на инвариантные торы в этой задаче эквивалентно соответствующему слоению в интегрируемой системе Клебша в динамике твердого тела (для которой также не найдено вещественное разделение переменных). В частности, для данной системы возможна неподвижная точка типа фокус, что может служить топологическим препятствием для вещественного разделения переменных.

Получено 16 ноября 2012 года
После доработки 24 декабря 2012 года

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор № 11.G34.31.0039), гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1 «Динамические системы классической механики и проблемы управления».

Борисов Алексей Владимирович

borisov@rcd.ru

Мамаев Иван Сергеевич

mmaev@rcd.ru

Институт компьютерных исследований;

Лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Институт машиноведения им. А. А. Благоднарова РАН

117334, Россия, г. Москва, ул. Бардина, д. 4

Институт математики и механики УрО РАН

620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16

Ключевые слова: интегрируемая система, бифуркационная диаграмма, конформно-гамильтонова система, бифуркация, слоение Лиувилля, критическое периодическое решение

Содержание

Введение	958
1. Уравнения движения и первые интегралы	959
2. Множество S_0 — неподвижные точки системы	962
3. Критическое множество S_1 — периодические орбиты	966
4. Обсуждение и открытые вопросы	972

Введение

В работе [17] С. А. Чаплыгин проинтегрировал в квадратурах задачу о качении динамически несимметричного уравновешенного шара по абсолютно шероховатой плоскости и указал основные особенности движения. Эта задача является классической в неголономной механике и до сих пор привлекает внимание исследователей разных направлений (см., например, [2, 3]). Динамика аналогичного шара (называемого обычно шаром Чаплыгина), движущегося без проскальзывания по поверхности неподвижной сферы, изучалась в [10], где был указан случай интегрируемости, который реализуется только при некотором значении отношения радиуса шара к радиусу сферы (см. далее). В работе [15] рассматриваемая здесь задача названа БМФ-системой, другие механические способы ее реализации рассмотрены в [7]. Оказалось, что с точки зрения явного интегрирования новая система представляет существенные трудности. На нулевом уровне одного из найденных интегралов, который линеен по импульсам (и является аналогом интеграла площадей), явное решение приведено в работах [1, 9]. Случай ненулевой константы указанного интеграла до сих пор далек от разрешения. Укажем только, что недавно в работе [16] указано (весьма сложное) конформно-гамильтоново представление этой системы, что однако пока не позволило продвинуться в ее явное интегрирование. Отметим, что для интегрирования классической задачи о шаре Чаплыгина на ненулевой постоянной площадей применяется нетривиальное преобразование координат и времени, редуцирующее систему на нулевую константу (предложено Чаплыгиным [17], обсуждается в [2], обобщение и геометрия этого преобразования рассматривается в [8]).

Обобщение данного преобразования для задачи, рассматриваемой в данной работе, вряд ли возможно, так как оно существенно связано с векторным интегралом кинетического момента (этот вектор неподвижен в абсолютном пространстве), который существует для задачи Чаплыгина, но пропадает в нашей задаче. Проблема явного интегрирования здесь более напоминает хорошо известный в механике случай Клебша в задаче Кирхгофа, описывающий движение по инерции односвязного твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости. Если на нулевом уровне константы площадей разделение переменных для случая Клебша достаточно элементарно (для него используются сфероконические координаты, а сама система изоморфна классической системе Неймана для движения точки по сфере в квадратичном потенциале), то для ненулевой константы *вещественное* разделение не выполнено до сих пор, несмотря на то, что этой проблемой занимались многие знаменитые математики и механики (на русском языке имеются книги [12, 13], где собраны классические работы по этому вопросу). Одной из альтернатив к разделению переменных

и явному решению в тэта-функциях являются методы топологического анализа интегрируемых систем, которые позволяют получить информацию о структуре слоения на торы, найти критические многообразия, представляющие так называемые особо замечательные движения (по терминологии Г. Аппельрота), исследовать устойчивость периодических траекторий и положений равновесия. Для интегрируемых гамильтоновых систем эти методы описаны в [6, 14]; в работе [5] эти результаты изложены с позиций более наглядного для механики понятия бифуркационного комплекса, а также имеются приложения к полному анализу устойчивости, который для интегрируемых систем оказывается возможно произвести без анализа явных квадратур.

Вследствие конформной гамильтоновости вышеупомянутой интегрируемой системы [16] все результаты [5] могут быть применены в данном случае. В настоящей работе выполнен бифуркационный анализ и, в частности, показано, что при некоторых значениях параметров возникают неподвижные точки типа фокус. Существование в фазовом пространстве неподвижных точек типа фокус (которые имеются, например, в случае Клебша), по-видимому, является препятствием к вещественному разделению переменных (переменные Кёттера для случая Клебша являются существенно комплексными). Как будет видно из дальнейшего анализа, рассматриваемая система по своему топологическому устройству очень близка к случаю Клебша, хотя и имеет ряд специфических особенностей.

1. Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим систему, описывающую качение твердого тела, опирающегося шаровой полостью на сферическое основание (см. рис. 1). Будем предполагать, что

- центр масс тела совпадает с геометрическим центром полости O ,
- в точке контакта P выполнено условие неспрокальзывания (абсолютно шероховатая поверхность),
- внешнее поле отсутствует,
- радиусы основания r и полости R соотносятся как $1:2$.

Выберем подвижную систему координат $Oe_1e_2e_3$, оси которой жестко совпадают с главными осями инерции твердого тела; пусть γ — нормаль в точке контакта (см. рис. 1), ω и M — угловая скорость тела и угловой момент относительно точки контакта, тогда уравнения движения, описывающие их эволюцию, представляются в форме [1, 10]

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \times \omega, \quad \dot{\gamma} = -\gamma \times \omega, \quad \omega = A(M + Z\gamma), \\ Z &= \frac{(AM, \gamma)}{D^{-1} - (\gamma, A\gamma)}, \quad A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $D = mR^2$, R — радиус полости, $A_i = (I_i + D)^{-1}$, I_i — главные моменты инерции тела.

Пусть Q — ортогональная матрица направляющих полюсов, которая определяет ориентацию тела и строки которой отвечают координатам векторов e_i в неподвижном базисе; ее эволюция задается уравнениями Пуассона

$$\dot{Q} = \tilde{\omega}Q, \quad (1.2)$$

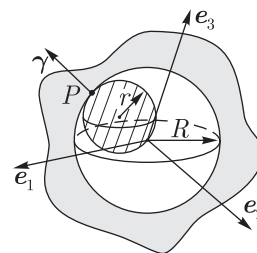


Рис. 1. Твердое тело со сферической полостью, обкатывающее неподвижный шар.

где $\tilde{\omega}$ — кососимметрическая матрица, соответствующая угловой скорости:

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Конфигурационное пространство рассматриваемой системы — $S^2 \times SO(3)$, и пара (γ, \mathbf{Q}) полностью характеризует положение тела. В дальнейшем мы сосредоточимся на изучении шестимерной приведенной системы (1.1), оставляя в стороне анализ эволюции ориентации $\mathbf{Q}(t)$. Заметим лишь, что для полной системы уравнений (1.1), (1.2) имеется три очевидных первых интеграла, выражающих условие постоянства вектора \mathbf{M} в неподвижных осях, эти интегралы можно представить в векторной форме

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{M} = \text{const}.$$

Для определенности всюду в дальнейшем будем предполагать, что главные оси инерции выбраны так, что выполнены неравенства

$$0 < D < I_1 < I_2 < I_3; \quad (1.3)$$

кроме того, напомним, что моменты инерции также удовлетворяют неравенству треугольников $I_i + I_j \geq I_k$, а следовательно, с учетом неравенств (1.3), необходимо потребовать

$$I_1 + I_2 \geq I_3. \quad (1.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Система (1.1) отличается от уравнений задачи Чаплыгина о качении шара по плоскости знаком в уравнениях для $\dot{\gamma}$ и областью физических значений моментов инерции: в шаре Чаплыгина $I_i < D$, $i = 1, 2, 3$.

Первые интегралы системы (1.1) задаются следующим образом:

$$F_0 = (\gamma, \gamma), \quad F_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad F_2 = (\gamma, \mathbf{B}\mathbf{M}), \quad E = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \omega), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{B} = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $B_k = \frac{1}{2}(A_i^{-1} + A_j^{-1} - A_k^{-1})$, здесь i, j, k — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3.

Кроме того, система допускает инвариантную меру $(D^{-1} - \gamma, \mathbf{A}\gamma)^{1/2} d\mathbf{M} d\gamma$ и, следовательно, согласно обобщению теоремы Эйлера — Якоби [4], является интегрируемой и конформно-гамильтоновой, что позволяет использовать для ее исследования топологический подход [5, 6]. Явное конформно-гамильтоново представление со скобкой Пуассона линейной по \mathbf{M} получено в работе [16].

Основная задача данной работы: пользуясь интегралами (1.5), указать критические траектории системы (1.1) и построить ее возможные бифуркационные диаграммы и соответствующие бифуркационные комплексы.

В связи с этим напомним некоторые необходимые определения, следуя в основном работе [5]. Во-первых, ограничим (формально) систему (1.1) на поверхность уровня интегралов F_0, F_2 :

$$\mathcal{M}_c = \{(\mathbf{M}, \gamma) \mid \gamma^2 = 1, (\gamma, \mathbf{B}\mathbf{M}) = c\}. \quad (1.6)$$

Получившаяся четырехмерная (конформно-гамильтонова) система обладает парой квадратичных интегралов F_1 и E , которые определяют *интегральное отображение* фазового пространства \mathcal{M}_c на плоскость значений первых интегралов,

$$\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), E(\mathbf{x})) = (f, h) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}_c.$$

Область возможных движений (ОВД) $\Phi(\mathcal{M}_c)$ — полный образ фазового пространства на плоскости первых интегралов (f, h) . Всякой точке $(f, h) \in \Phi(\mathcal{M}_c)$ соответствует интегральное многообразие системы $\mathcal{M}_{f,h}^c = \{F_1(\mathbf{x}) = f, E(\mathbf{x}) = h\}$, которое, вообще говоря, может содержать несколько связных компонент.

Множество критических точек интегрального отображения определяется как

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_c \mid \text{rank } d\Phi(\mathbf{x}) < 2\},$$

оно является инвариантным множеством, целиком заполненным критическими траекториями. Множество S распадается на два непересекающихся подмножества:

$$S = S_0 \cup S_1,$$

$$S_0 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_c \mid \text{rank } d\Phi(\mathbf{x}) = 0\}, \quad S_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_c \mid \text{rank } d\Phi(\mathbf{x}) = 1\}.$$

В типичной ситуации S_0 — это отдельные точки, а S_1 — однопараметрическое семейство (или несколько семейств) замкнутых кривых, которые могут либо быть периодическими решениями исходной системы (1.1), либо целиком состоять из неподвижных точек (1.1), либо включать в себя асимптотические траектории, входящие в неподвижные точки.

Образы соответствующих множеств на плоскости первых интегралов будем обозначать аналогичным образом:

$$\Sigma = \Phi(S), \quad \Sigma_0 = \Phi(S_0), \quad \Sigma_1 = \Phi(S_1).$$

Бифуркационной диаграммой интегрируемой системы будем называть изображенную на плоскости первых интегралов (f, h) область возможных движений $\Phi(\mathcal{M}_c)$ совместно с образом критического множества Σ и указанием образов Σ_0 и Σ_1 .

Для данной системы (1.1) в случае $(\gamma, \mathbf{B}\mathbf{M}) = 0$ (то есть $c = 0$) в [1] найдено разделение переменных и показано, что единственно возможные критические периодические решения (то есть множество S_1) определяются условиями

$$\omega_i = \omega_j = 0, \quad \gamma_k = 0, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3).$$

Следовательно, $\gamma \perp \omega$, то есть тело катится вдоль большого круга на опорной сфере, плоскость которого совпадает с одной из главных плоскостей инерции тела. При этом на плоскости первых интегралов бифуркационные кривые (множество Σ_1) задаются соотношениями

$$\sigma_k: h = A_k f, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.7)$$

Множество S_0 в этом случае совпадает с неподвижной точкой $\omega = 0$, которой на плоскости первых интегралов (f, h) отвечает начало координат (то есть $\Sigma_0 = \{(0, 0)\}$). Область возможных движений $\Phi(\mathcal{M}_0)$ расположена между верхней прямой σ_1 и нижней σ_3 (соответствующая бифуркационная диаграмма изображена на рис. 2а).

Можно показать, что каждой регулярной точке $(f, h) \in \Phi(\mathcal{M}_0)$ соответствует пара инвариантных торов системы (1.1) (бифуркационный комплекс имеет вид, изображенный на рис. 2б).

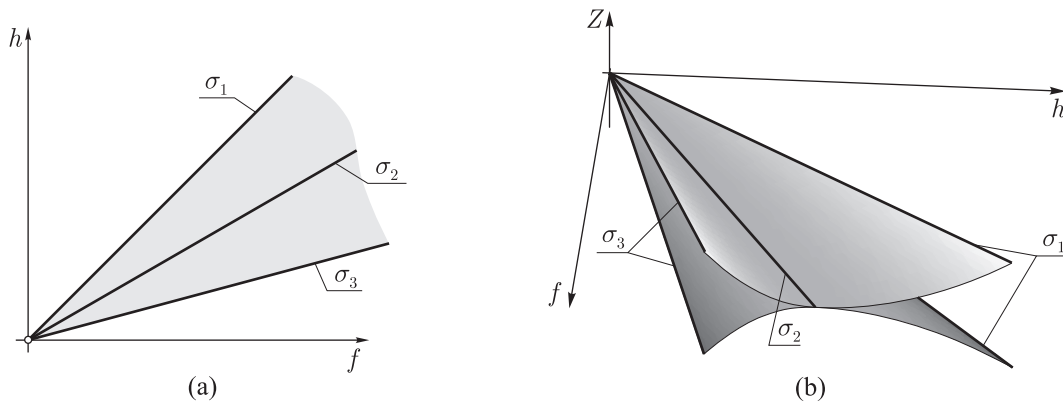


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма и бифуркационный комплекс в случае $(\mathbf{B}\mathbf{M}, \gamma) = 0$.

2. Множество S_0 — неподвижные точки системы

Описание критического множества системы в случае $c \neq 0$ начнем с неподвижных точек и анализа их типа и устойчивости.

Условие $\text{rank } d\Phi = 0$ означает, что дифференциалы (градиенты) обоих интегралов F_2 и E , ограниченных на \mathcal{M}_c , обращаются в нуль. В исходных переменных \mathbf{M} , γ оно может быть переписано при помощи неопределенных множителей в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{M}} &= \lambda_1 \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{M}} + \mu_1 \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{M}}, & \frac{\partial E}{\partial \gamma} &= \lambda_1 \frac{\partial F_0}{\partial \gamma} + \mu_1 \frac{\partial F_2}{\partial \gamma}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{M}} &= \lambda_2 \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{M}} + \mu_2 \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{M}}, & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} &= \lambda_2 \frac{\partial F_0}{\partial \gamma} + \mu_2 \frac{\partial F_2}{\partial \gamma}, \\ F_0 &= \gamma^2 = 1, & F_2 &= (\gamma, \mathbf{B}\mathbf{M}) = c, \end{aligned}$$

где λ_i , μ_i — неопределенные множители. Используя эти уравнения, можно показать, что для точек множества S_0 векторы \mathbf{M} , γ , ω коллинеарны между собой

$$\mathbf{M} \parallel \gamma \parallel \omega$$

и, кроме того, каждый из этих векторов является собственным вектором матрицы \mathbf{A} . Отсюда также заключаем, что множество S_0 совпадает с неподвижными точками системы (1.1). Окончательно находим, что имеется три пары неподвижных точек, определяемых соотношениями

$$P_k^\pm: \gamma = \pm e_k, \quad \mathbf{M} = I_k \omega = \pm \mu e_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

где e_k — орты главных осей инерции.

Для каждого из решений P_k^\pm согласно (1.1) и (1.2) заключаем, что одна из главных осей инерции тела (направленная вдоль e_k) остается постоянной относительно неподвижных осей и проходит через точку контакта. При этом тело равномерно вращается вокруг этой оси в ту или другую сторону с угловой скоростью $\omega_k = \frac{2h}{c} B_k$, где h , c — величины первых интегралов, B_k — элемент матрицы \mathbf{B} .

На поверхности уровня \mathcal{M}_c (1.6) для каждой из неподвижных точек (2.1) выберем локальные переменные $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, где

$$\gamma_i = x_1, \quad \gamma_i = x_2, \quad \gamma_k = \pm \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2},$$

$$M_i = x_3, \quad M_j = x_4, \quad M_k = \pm \frac{c - b_i x_1 x_3 - b_j x_2 x_4}{b_k \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}},$$

здесь и далее i, j, k — циклическая перестановка 1, 2, 3. Характеристический полином линеаризованной системы на \mathcal{M}_c для каждой из точек P_k^\pm представляется в форме

$$\chi_k(\lambda) = \left(\frac{I_k(D - I_k + I_i + I_j)}{2c} \lambda \right)^4 + a_k \left(\frac{I_k(D - I_k + I_i + I_j)}{2c} \lambda \right)^2 + b_k, \quad (2.2)$$

$$a_k = \frac{(D - I_k)(D - I_k + I_i + I_j) + 2I_i I_j - 2DI_k}{(D + I_i)(D + I_j)}, \quad b_k = \frac{(I_k - I_i)(I_k - I_j)}{(D + I_i)(D + I_j)}.$$

Из вида характеристического полинома заключаем, что

типы неподвижных точек P_k^\pm зависят не от величины интеграла c , а только от параметров $D, I_i, i = 1, 2, 3$.

Напомним, что на плоскости коэффициентов характеристического полинома типы неподвижных точек разделяются кривыми $b = 0$ и $a^2 - 4b = 0$ (см. рис. 2).

Из (2.2) и (1.3) находим, что $b_2 < 0$, следовательно,

P_2^\pm — это точки типа седло-центр (то есть вращения средней оси инерции всегда неустойчивы).

Для анализа вращений вокруг остальных осей зададим величины

$$\Delta_k = (D + I_i)^2 (D + I_j)^2 (a_k^2 - 4b_k),$$

$$\delta_k = (D + I_i)(D + I_j)a_k,$$

определяющие знаки дискриминанта и коэффициента a_k характеристического полинома (2.2).

Для неподвижных точек P_1^\pm , задающих вращение вокруг наименьшей оси, представим эти величины в виде

$$\delta_1 = D(I_2 + I_3 - 2I_1) + I_2(I_3 - I_1) + I_3(I_2 - I_1) + (I_1 - D)^2,$$

$$\Delta_1 = 4DI_1(I_3 - I_2)^2 + (I_1 - D)^2[(I_1 - D)^2 + (2D + I_2 + I_3)(I_2 + I_3 - 2I_1)].$$

Пользуясь неравенствами (1.3), замечаем, что $\delta_1 > 0, \Delta_1 > 0$, то есть

P_1^\pm — точки типа центр-центр.

Для исследования типа точек P_3^\pm перепишем величины Δ_3, δ_3 в форме

$$\Delta_3 = 4DI_3(I_3 - D)^2 \left(\frac{\zeta^2}{4DI_3} - \frac{\eta^2}{(I_3 - D)^2} - 1 \right), \quad \delta_3 = \frac{1}{2}(\zeta^2 - \eta^2 + (I_3 - D)^2 - 4DI_3),$$

$$\zeta = I_1 + I_2 - (I_3 - D), \quad \eta = I_2 - I_1.$$

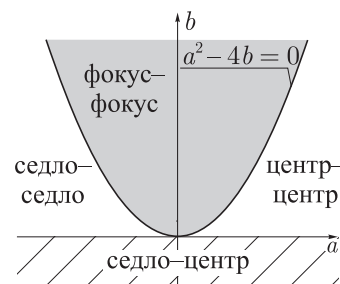


Рис. 3. Типы неподвижных точек на плоскости значений коэффициентов характеристического полинома.

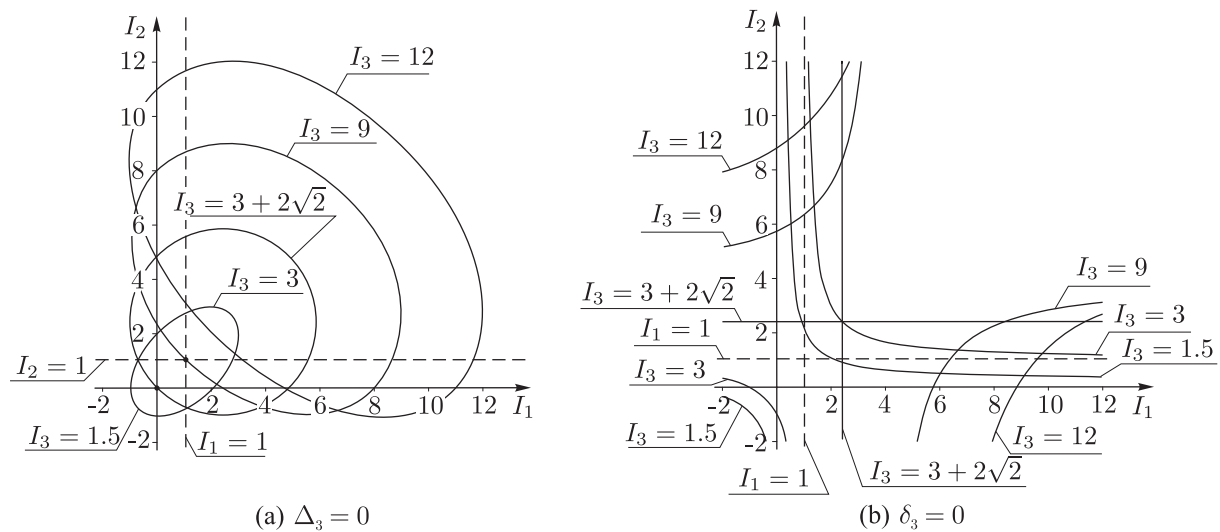


Рис. 4. Характерный вид кривых $\Delta_3 = 0$ и $\delta_3 = 0$ на плоскости (I_1, I_2) при различных значениях I_3 ($D = 1$).

Следовательно, при фиксированном значении I_3 на плоскости величин I_1, I_2 уравнения $\Delta_3 = 0$ и $\delta_3 = 0$ определяют эллипс и гиперболу с центром в точке $I_1 = I_2 = I_3 - D$ и главными осями, повернутыми относительно координатных на $\pi/4$ (см. рис. 4).

Без ограничения общности положим в дальнейшем

$$D = 1.$$

При фиксированном значении I_3 , согласно (1.3), (1.4), область возможных значений I_1, I_2 является

- при $I_3 \leq 2$ — прямоугольным треугольником, ограниченным отрезками прямых $I_2 = I_3$, $I_1 = 1$ и $I_1 = I_2$ (см. рис. 5а),
- при $I_3 > 2$ — четырехугольником, ограниченным прямыми $I_2 = I_3$, $I_1 = 1$, $I_1 = I_2$ и $I_1 + I_2 = I_3$ (см. рис. 5b–d).

Несложно показать, что при каждом фиксированном I_3

- эллипс $\Delta_3 = 0$ касается прямой $I_2 = I_3$ в точке пересечения с гиперболой $\delta_3 = 0$ (см. рис. 5); абсцисса этой точки пересечения равна $I_1^c = \frac{3I_3 - 1}{I_3 + 1}$ и при условиях (1.3) удовлетворяет неравенству $1 < I_1^c < I_3$,
- при $I_3 > 2$ отрезок прямой $I_1 + I_2 = I_3$, ограничивающий область возможных I_1, I_2 , находится внутри эллипса $\Delta_3 = 0$ (см. рис. 5b–d),
- ветви гиперболы $\delta_3 = 0$ меняют расположение относительно главных осей при $I_3 = 3 + 2\sqrt{2}$ (см. рис. 5с).

Анализируя возможное расположение кривых $\Delta_3 = 0$, $\delta_3 = 0$ и границ области возможных значений моментов инерции, заключаем, что

при всяком фиксированном значении I_3 неподвижные точки P_3^\pm могут быть одного из трех следующих типов — седло–седло, фокус–фокус и центр–центр (соответствующие области на рис. 5 обозначены буквами S, F, C).

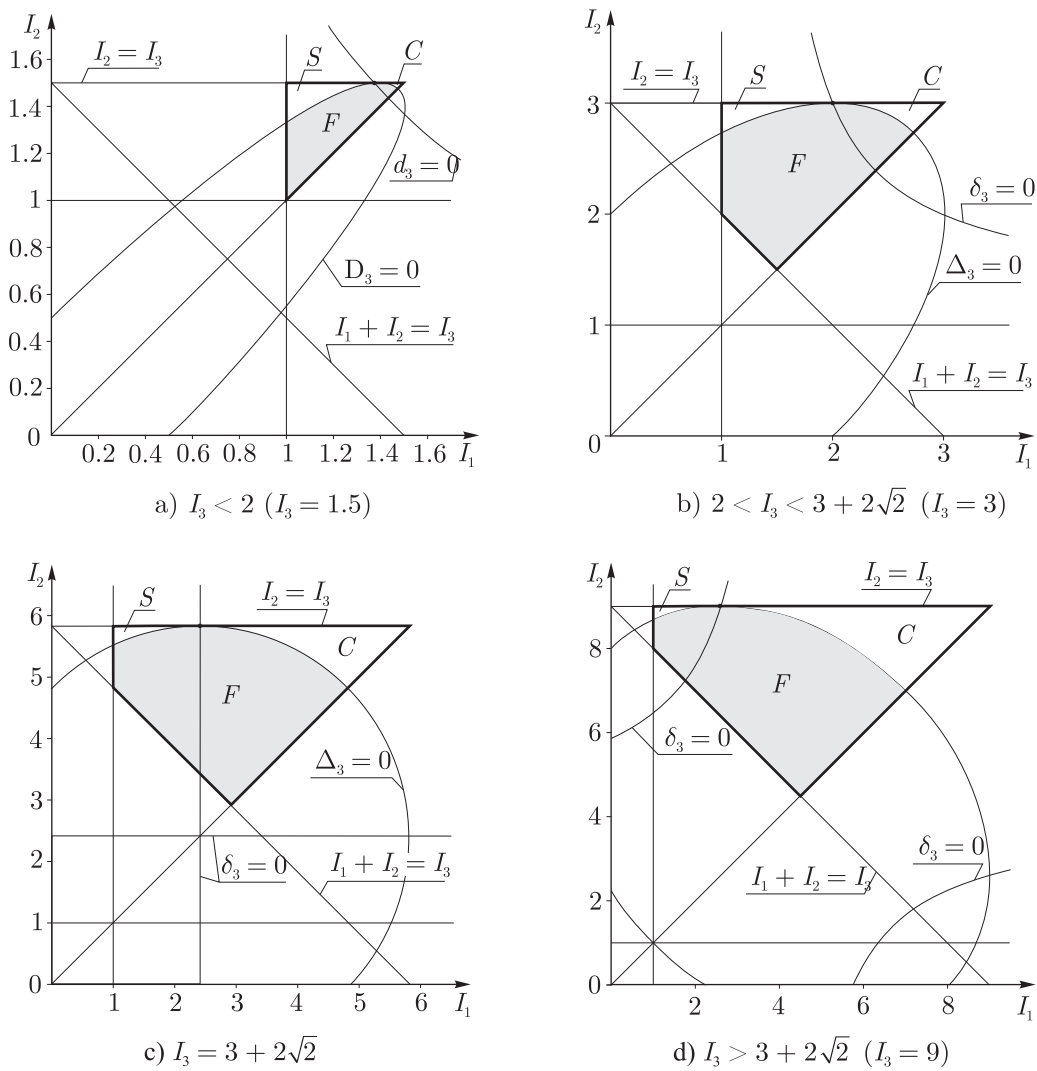


Рис. 5. Характерный вид областей на плоскости I_1, I_2 , соответствующих разным типам неподвижной точки P_3^\pm , при различных фиксированных значениях I_3 ($D = 1$).

Окончательно резюмируем полученные результаты:

Теорема 1. Множество S_0 системы (1.1) совпадает с ее множеством неподвижных точек P_k^\pm , $k = 1, 2, 3$, которые определяются уравнениями (1.7). Типы неподвижных точек не зависят от значений первых интегралов, а определяются величинами параметров \mathcal{D}/I_k , $k = 1, 2, 3$. Типы неподвижных точек в случае, когда моменты инерции удовлетворяют соотношениям (1.3), (1.4):

P_1^\pm — центр-центр,

P_2^\pm — седло-центр,

P_3^\pm — одного из трех типов — седло-седло, фокус-фокус, центр-центр (в зависимости от условий, указанных выше).

3. Критическое множество S_1 — периодические орбиты

По аналогии с анализом случая Клебша в работе [5] в данной задаче будем строить множество критических периодических орбит при помощи метода неопределенных множителей. Условие $\text{rank } d\Phi = 1$ на многообразии \mathcal{M}_c (1.6) можно представить в форме

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{M}} = \Lambda_0 \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{M}} + \Lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{M}} + \Lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{M}}, \quad \frac{\partial E}{\partial \gamma} = \Lambda_0 \frac{\partial F_0}{\partial \gamma} + \Lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} + \Lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial \gamma},$$

$$(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1, \quad (\gamma, \mathbf{B}\mathbf{M}) = c.$$

Учитывая соотношения $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega}$, $\frac{\partial E}{\partial \gamma} = Z\boldsymbol{\omega}$, сделаем подстановку $Z\gamma = \mathbf{N}$ и замену неопределенных множителей $\Lambda_0 = Z^2(\det \mathbf{A})\lambda_0$, $\Lambda_1 = (\det \mathbf{A})\lambda_1$, $\Lambda_2 = 2Z(\det \mathbf{A})\lambda_2$; получим систему линейных однородных уравнений

$$(\mathbf{A} - \lambda_1(\det \mathbf{A})\mathbf{E})\mathbf{M} + (\mathbf{A} - 2\lambda_2(\det \mathbf{A})\mathbf{B})\mathbf{N} = 0,$$

$$(\mathbf{A} - 2\lambda_2(\det \mathbf{A})\mathbf{B})\mathbf{M} + (\mathbf{A} - \lambda_0(\det \mathbf{A})\mathbf{E})\mathbf{N} = 0. \quad (3.1)$$

Вследствие диагональности матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} эта система разбивается на три независимых системы из двух уравнений следующего вида:

$$(A_i - \lambda_1 \det \mathbf{A})M_i + (A_i - 2\lambda_2 B_i \det \mathbf{A})N_i = 0,$$

$$(A_i - 2\lambda_2 B_i \det \mathbf{A})M_i + (A_i - \lambda_0 \det \mathbf{A})N_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

Для каждой из этих систем условием существования отличного от нуля решения является обращение в нуль детерминанта соответствующей матрицы коэффициентов:

$$g_i = (A_i - \lambda_0 \det \mathbf{A})(A_i - \lambda_1 \det \mathbf{A}) - (A_i - 2\lambda_2 B_i \det \mathbf{A})^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Можно показать, что из этих трех уравнений лишь два являются независимыми. Таким образом, возможны два типа решений.

1. Три независимых двухпараметрических семейства решений для неопределенных множителей λ_0 , λ_1 , λ_2 , для которых

$$g_k = 0, \quad g_i \neq 0, \quad g_j = 0,$$

где i, j, k — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3. Такому выбору неопределенных множителей соответствуют неподвижные точки P_k^\pm , описанные выше (см. (2.1)).

2. Два двухпараметрических семейства Π^\pm решений для λ_0 , λ_1 , λ_2 , для которых одновременно выполнены соотношения

$$g_1 = g_2 = g_3 = 0, \quad (3.3)$$

при этом

$$\lambda_0^\pm = \left(\sum_i J_i \right) \lambda_2 - 2\lambda_2^2 \pm 2\sqrt{R_0(\lambda_2)}, \quad \lambda_1^\pm = \left(\sum_i J_i \right) \lambda_2 - 2\lambda_2^2 \mp 2\sqrt{R_0(\lambda_2)},$$

$$R_0(\lambda_2) = \lambda_2(\lambda_2 - J_1)(\lambda_2 - J_2)(\lambda_2 - J_3), \quad (3.4)$$

где $J_i = I_i + D$ и Π^+ соответствует верхний знак в формуле, а Π^- — нижний.

Покажем, что решениям второго типа соответствует несколько однопараметрических семейств периодических решений. Согласно (3.3), каждая система (3.2) имеет нетривиальное решение, так что общее решение можно представить в форме

$$\mathbf{M} = -(\mathbf{A} - 2\lambda_2(\det \mathbf{A})\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A} - \lambda_0(\det \mathbf{A})\mathbf{E})\mathbf{N}. \quad (3.5)$$

Подставим это соотношение в уравнение (1.1), определяющее Z , и учтем, что $\mathbf{N} = Z\boldsymbol{\gamma}$ и λ_0 определен согласно (3.4); получим однопараметрические семейства квадрик вида

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}^\pm(\lambda_2)\boldsymbol{\gamma}) &= D^{-1} = 1, \\ \mathbf{C}^\pm(\lambda_2) &= \mathbf{A}(\mathbf{A} - 2\lambda_2(\det \mathbf{A})\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A} - \lambda_0^\pm(\det \mathbf{A})\mathbf{E}) + \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где λ_0^\pm определено соотношением (3.4).

Поскольку в выбранной системе координат матрицы \mathbf{C}^+ , \mathbf{C}^- диагональны, то есть $\mathbf{C}^\pm = \text{diag}(C_1^\pm, C_2^\pm, C_3^\pm)$, окончательно получим:

критические периодические орбиты системы (1.1) на фиксированном уровне первых интегралов $F_0 = 1$, $F_2 = c$ и $D = 1$ задаются как пересечение однопараметрических семейств квадрик со сферой:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_1^2}{\tilde{C}_1^\pm} + \frac{\gamma_2^2}{\tilde{C}_2^\pm} + \frac{\gamma_3^2}{\tilde{C}_3^\pm} &= 1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ \tilde{C}_k^\pm &= (C_k^\pm)^{-1} = \frac{J_k}{2}(1 \pm R_k), \quad R_k = \frac{\sqrt{R_0}}{\lambda_2(\lambda_2 - J_k)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Выразим из уравнений (3.7) любую пару величин γ_i^2 , γ_j^2 и, пользуясь (3.5), подставим в соотношения (1.5) для интегралов F_1 , F_2 , E . Вследствие того, что кривые (3.7) являются траекториями системы, получим выражения, которые не зависят от координат $\boldsymbol{\gamma}$, следующего вида:

$$E = Z^2 U^\pm(\lambda_2), \quad F_1 = Z^2 V^\pm(\lambda_2), \quad F_2 = Z W^\pm(\lambda_2),$$

где функции U^\pm , V^\pm , W^\pm зависят только от λ_2 и параметров D , I_k (вследствие их громоздкости мы не приводим их здесь явно). Отсюда, в частности, следует, что на критических траекториях (3.7) функция $Z(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ остается постоянной.

Обозначая постоянные интегралов $E = h$, $F_1 = f$, на фиксированном уровне $F_2 = c$ получим бифуркационные кривые, заданные в параметрической форме следующим образом:

$$h = c^2 \frac{U^\pm(\lambda_2)}{(W^\pm(\lambda_2))^2}, \quad f = c^2 \frac{V^\pm(\lambda_2)}{(W^\pm(\lambda_2))^2}. \quad (3.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из этого представления следует, что на плоскости значений интегралов $\mathbb{R}^2 = \{(f, h)\}$ от величины c взаимное расположение бифуркационных кривых не зависит, а зависят лишь их размеры.

Исследуем подробнее условия существования решений в системе (3.7) и построим бифуркационную диаграмму. Прежде всего заметим, что коэффициенты в квадрике (3.6) являются вещественными, если

$$\lambda_2 \in (-\infty, 0) \cup (J_1, J_2) \cup (J_3, +\infty). \quad (3.9)$$

Напомним условия существования пересечения квадрик (3.7):

- если все коэффициенты $\tilde{C}_i^\pm > 0$, тогда требуется $\min(\tilde{C}_1^\pm, \tilde{C}_2^\pm, \tilde{C}_3^\pm) \leq 1$, а $\max(\tilde{C}_1^\pm, \tilde{C}_2^\pm, \tilde{C}_3^\pm) \geq 1$,
- если один из коэффициентов $\tilde{C}_i^\pm < 0$, тогда $\min(\tilde{C}_j^\pm, \tilde{C}_k^\pm) \leq 1, j, k \neq i$,
- если два коэффициента $\tilde{C}_i^\pm, \tilde{C}_j^\pm < 0$, тогда $\tilde{C}_k^\pm \leq 1, k \neq i, j$.

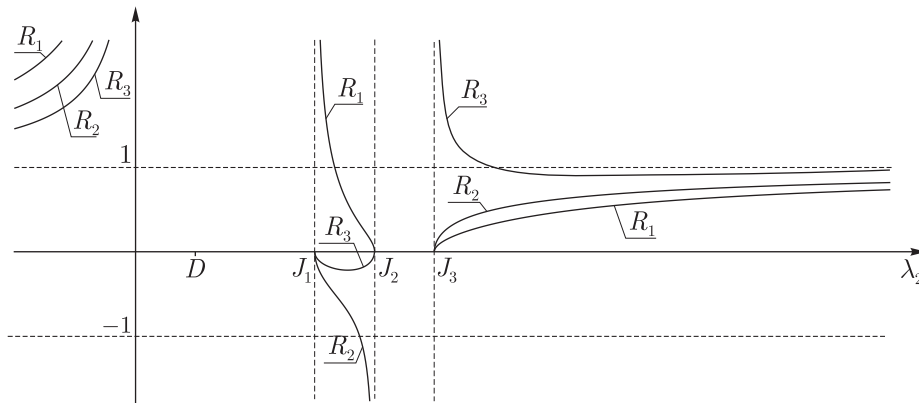


Рис. 6. Характерный вид функций $R_k, k = 1, 2, 3$.

Для анализа поведения коэффициентов $\tilde{C}_k^\pm(\lambda_2)$ нам потребуется ряд свойств функций $R_k(\lambda_2)$ при условии, что выполнены неравенства (1.3):

на интервале $(-\infty, 0)$: все функции $R_k > 1, k = 1, 2, 3$, и монотонно возрастают,

на интервале (J_1, J_2) : функция R_1 монотонно убывает от $+\infty$ до 0, функция R_2 монотонно убывает от 0 до $-\infty$, функция R_3 отрицательна, обращается в нуль на концах интервала и имеет внутри единственный минимум, $R_3 = -R_3^-$ в точке $\lambda_2 = J_3^{(1)}$,

на интервале $(J_3, +\infty)$: функции R_1, R_2 монотонно возрастают от 0 до 1, функция R_3 монотонно убывает от $+\infty$ до R_3^+ на интервале $(J_3, J_3^{(2)})$ и монотонно возрастает от R_3^+ до 1 на интервале $(J_3^{(2)}, +\infty)$,

где точки минимума $\lambda_2 = J_3^{(1)} \in (J_1, J_2)$ и $\lambda_2 = J_3^{(2)} \in (J_3, +\infty)$ функции $R_3(\lambda_2)$ определяются как корни уравнения

$$\lambda_2^2 - 2J_3^* \lambda_2 + J_3 J_3^* = 0, \quad J_3^* = \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2 - J_3},$$

а значения R_3^\pm —

$$R_3^\pm = \frac{\sqrt{J_2(J_3 - J_1)} \pm \sqrt{J_1(J_3 - J_2)}}{J_3}, \quad 0 < R_3^- < R_3^+ < 1.$$

Кроме того, каждое уравнение $|R_k| = 1$ имеет единственное решение $\lambda_2 = J_k^*$ на множестве (3.9):

$$J_k^* = \frac{J_i J_j}{J_i + J_j - J_k}, \quad J_1^*, J_2^* \in (J_1, J_2), \quad J_3^* \in (J_3, +\infty).$$

Используя вышеперечисленные свойства функций $R_k, k = 1, 2, 3$, заключаем, что на интервале $(-\infty, 0)$ все коэффициенты $\tilde{C}_k^+ > 1, \tilde{C}_k^- < 0$, а на интервале $(J_3, +\infty)$ все $\tilde{C}_k^+ > 1$.

Таким образом, система (3.7) допускает решения

для семейства Π^+ только на интервале (J_1, J_2) ,

для семейства Π^- на множестве $(J_1, J_2) \cup (J_3, +\infty)$.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Семейство Π^+ . Характерный вид функций \tilde{C}_k^+ на интервале (J_1, J_2) показан на рисунке 7. В этом случае решения системы (3.7) существуют на интервале

$$\lambda_2 \in (J_2^P, J_2^*), \quad (3.10)$$

где J_2^P — корень уравнения $\tilde{C}_2^+ = 1$, а J_2^* — корень уравнения $\tilde{C}_2^+ = 0$. Чтобы показать это, нужно убедиться, что J_2^* лежит левее корней уравнения $\tilde{C}_3^+ = 1$ (если таковые имеются): действительно, с учетом неравенств (1.3) получим

$$\tilde{C}_3^+|_{\lambda_2=J_2^*} = \frac{1}{2}(J_1 + J_3 - J_2) > 1.$$

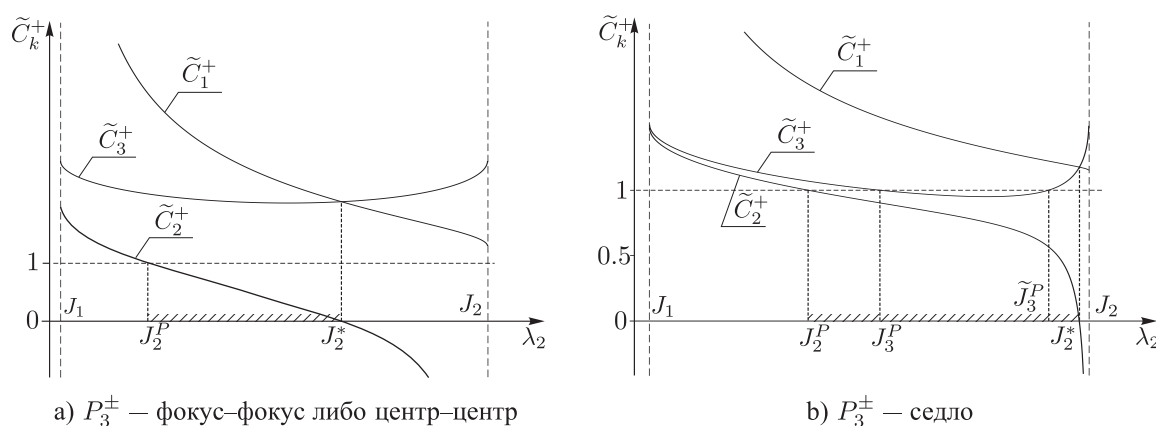


Рис. 7. Характерный вид функций \tilde{C}_k^+ на интервале (J_1, J_2) , заштрихован интервал существования решений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что в точках $\lambda_2 = J_k^*$ выполнены равенства

$$\lambda_2 = J_1^*: \quad C_1^- = 0, \quad C_2^- = C_3^- = \frac{1}{2}(J_2 + J_3 - J_1),$$

$$\lambda_2 = J_2^*: \quad C_2^+ = 0, \quad C_1^+ = C_3^+ = \frac{1}{2}(J_1 + J_3 - J_2),$$

$$\lambda_2 = J_3^*: \quad C_3^- = 0, \quad C_1^- = C_2^- = \frac{1}{2}(J_1 + J_2 - J_3),$$

при этом квадрика сплюсчивается в круговой диск.

Левому концу J_2^P интервала (3.10) отвечают неподвижные точки P_2^\pm , а любому значению λ_2 внутри (3.10) — пара периодических орбит. Исключение составляет случай, когда P_3^\pm — точки типа седло-седло, тогда внутри интервала (3.10) появляется пара корней уравнения $\tilde{C}_3^+ = 1$ (см. рис. 7b), которые обозначим J_3^P, \tilde{J}_3^P ; этим корням соответствует пара неподвижных точек и соединяющие их сепаратрисные кривые.

Подставляя $\lambda_2 \in (J_2^P, J_2^*)$ в соотношения (3.8) на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(f, h)\}$, получим

бифуркационную кривую σ^+ , выходящую из точки P_2 (см. рис. 8–10).

Если при этом точка P_3^\pm имеет тип седло–седло, то кривая σ_1^+ проходит через P_3 , а значениям $\lambda_2 \in (J_3^P, \tilde{J}_3^P)$ отвечает «ласточкин хвост» («улыбка», см. рис. 13).

Семейство Π^- на интервале (J_1, J_2) . Характерный вид функций \tilde{C}_k^- в этом случае показан на рисунке 8. В данном случае решения системы (3.7) существуют лишь для интервала

$$\lambda_2 \in (J_1^*, J_1^P), \quad (3.11)$$

где, как и выше, J_1^*, J_1^P — корни уравнений $\tilde{C}_1^- = 0$ и $\tilde{C}_1^- = 1$ соответственно.

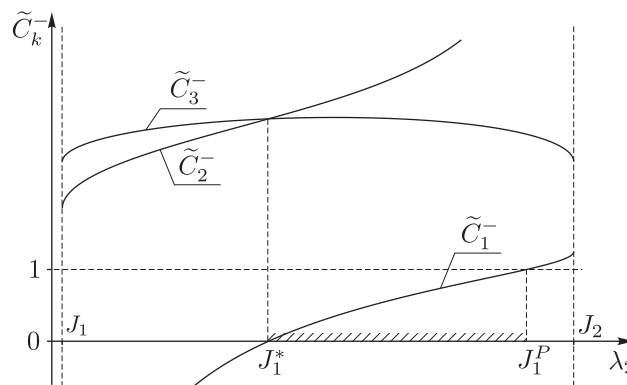


Рис. 8. Характерный вид функций \tilde{C}_k^- на интервале (J_1, J_2) , заштрихован интервал существования решений.

Правому концу интервала (3.11) соответствуют неподвижные точки P_1^\pm , и любому значению λ_2 внутри (3.11) также отвечает пара периодических орбит.

Подставляя $\lambda_2 \in (J_1^*, J_1^P)$ в (3.8), получим

бифуркационную кривую σ_1^- , выходящую из точки P_1 (см. рис. 8–10).

Как будет ясно, эта кривая ограничивает сверху область возможных значений интегралов на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(f, h)\}$.

Семейство Π^- на интервале $(J_3, +\infty)$. В зависимости от типа точек P_3^\pm возможны три вида взаимного расположения кривых $C_k^-(\lambda_2)$, $k = 1, 2, 3$, приведенные на рисунках 9, 10.

Если P_3^\pm — седло–седло (см. рис. 9a), то интервал существования решений системы (3.8):

$$\lambda_2 \in (J_3^*, J_1^P), \quad (3.12)$$

если P_3^\pm — фокус–фокус (см. рис. 9b), то соответствующий интервал

$$\lambda_2 \in (J_1^P, J_3^*), \quad (3.13)$$

где, как и выше, J_1^P и J_3^* — корни уравнений $C_1^- = 1$ и $C_3^- = 0$ соответственно. Как и в предыдущем случае, значению $\lambda_2 = J_1^P$ соответствуют неподвижные точки P_1^\pm , а каждому значению λ_2 внутри интервалов (3.12) и (3.13) отвечает пара кривых, за исключением $\lambda_2 = J_2^P$. Этому значению отвечает пара точек P_2^\pm , соединенных сепаратрисными кривыми.

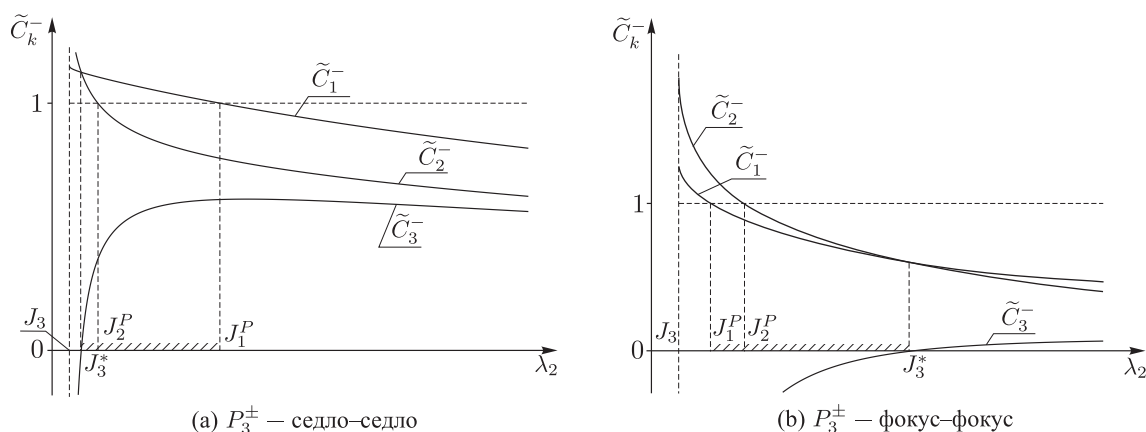


Рис. 9. Вид кривых $C_k^-(\lambda_2)$ в случаях, когда P_3^\pm — седло-седло (a) и фокус-фокус (b), заштрихован интервал существования решений.

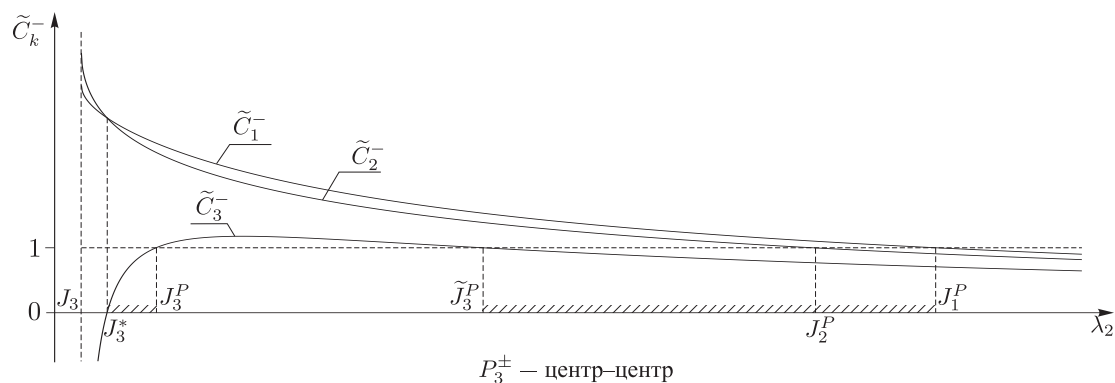


Рис. 10. Вид функций $C_k^-(\lambda_2)$ при условии, что P_3^\pm — центр-центр, заштрихованы интервалы существования решений.

Таким образом, обоим случаям (3.12) и (3.13) соответствует

бифуркационная кривая σ_2^- , выходящая из точки P_1 и проходящая через точку P_3 .

Если P_3^\pm — центр-центр, то решения системы (3.8) существуют на паре интервалов

$$\lambda_2 \in (J_3^*, J_3^P) \cup (\tilde{J}_3^P, J_1^P),$$

где J_3, \tilde{J}_3^P — корни уравнения $C_3^- = 1$. В этом случае получим, что

значениям $\lambda_2 \in (\tilde{J}_3^P, J_1^P)$ соответствует бифуркационная кривая σ_3^- , выходящая из точки P_1 и оканчивающаяся в точке P_3 ,

значениям $\lambda_2 \in (J_3^*, J_3^P)$ — бифуркационная кривая σ_4^- , выходящая из P_3 и уходящая в ∞ .

Таким образом, в данном случае возможные типы бифуркационных диаграмм совпадают с аналогичными типами в случае Клебша (отличие заключается лишь в том, что тип диаграммы зависит не от величины линейного интеграла $F_1 = c$, а лишь от параметров I_k/D , $k = 1, 2, 3$). Кроме того, как следует из сказанного выше, при фиксированном c

каждой точке в области возможных значений интегралов соответствует пара интегральных многообразий $E_1 = h$, $F_1 = f$, а следовательно, типы бифуркационных комплексов также совпадают с типами бифуркационных комплексов в случае Клебша (см. в работе [5] рис. 14, 15, 16), поэтому мы здесь их не приводим.

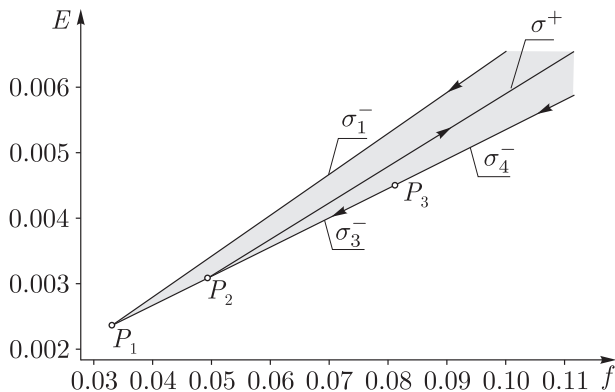


Рис. 11. Бифуркационная диаграмма в случае, когда P_3^\pm — центр-центр ($D = 1$, $I_1 = 7$, $I_2 = 8$, $I_3 = 9$). Стрелки указывают направление возрастания параметра λ_2 .

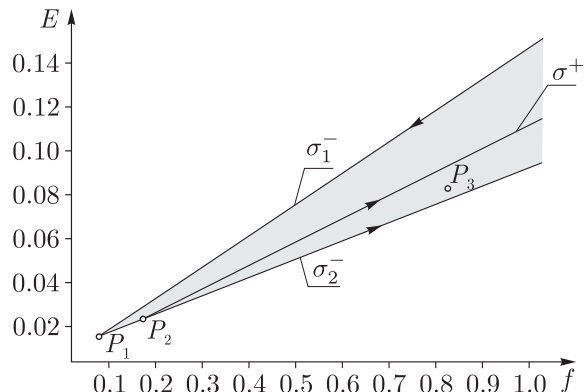


Рис. 12. Бифуркационная диаграмма в случае, когда P_3^\pm — фокус-фокус ($D = 1$, $I_1 = 2.5$, $I_2 = 3.7$, $I_3 = 5$). Стрелки указывают направление возрастания параметра λ_2 .

Окончательно получим следующий результат:

Теорема 2. Тип бифуркационной диаграммы системы (1.1) зависит лишь от значений параметров I_i/D и не зависит от величины интеграла $(\gamma, \mathbf{BM}) = c$. При выполнении физических ограничений (1.3), (1.4) возможны три типа диаграмм, которые определяются типом неподвижной точки P_3 (перманентное вращение вокруг наибольшей оси), они представлены на рисунках 11, 12, 13. Бифуркационные комплексы совпадают с соответствующими бифуркационными комплексами случая Клебша.

4. Обсуждение и открытые вопросы

Как видно из приведенного анализа, БМФ-система топологически имеет очень сходное устройство со случаем Клебша. Имело бы смысл прояснить вопрос о действительной их топологической эквивалентности, а может быть, и найти явное алгебраическое преобразование, связывающие оба случая (такие формулы известны, например, для случая Клебша и волчка Шоттки – Манакова на $SO(4)$).

Для механики наибольший интерес представляют вопросы абсолютной динамики шара (поведение точки контакта и подобные такие вопросы частично разрешил Чаплыгин для движения шара по плоскости [16] (см. также [15])). Особый интерес представляют найденные устойчивые периодические движения, которые, возможно, подскажут область практического применения найденной интегрируемой системы (отметим, что интеграл F_2 имеет «скрытое» симметричное происхождение и не связан ни с каким естественным законом сохранения).

В работе [2] указано, что интегрируемость системы (1.1) сохраняется при добавлении поля задачи Бруна $V = \frac{1}{2}(\gamma, A^{-1}\gamma)$. В этом смысле получается некоторая суперпозиция рассмотренной в данной работе задачи и системы Клебша. Интересно было бы произвести

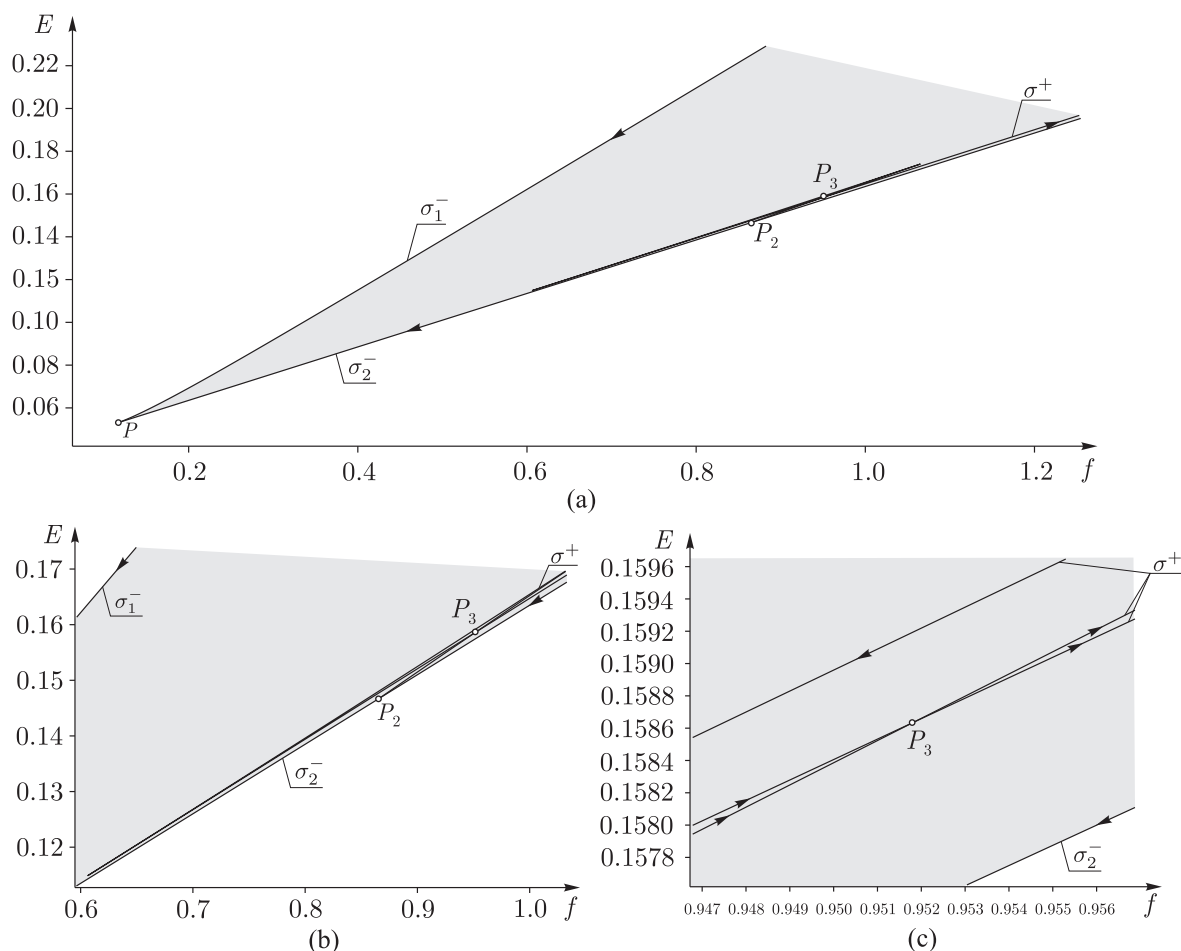


Рис. 13. Бифуркационная диаграмма в случае, когда P_3^\pm — седло–седло, и последовательные увеличения области в окрестности этой седловой точки ($D = 1$, $I_1 = 1.1$, $I_2 = 2.95$, $I_3 = 3$). Стрелки указывают направление возрастания параметра λ_2 .

бифуркационный анализ этой общей системы — возможно, она обладает существенно более богатой топологической структурой.

Авторы благодарят А. В. Болсинова за полезные советы и замечания.

Список литературы

- [1] Borisov A. V., Fedorov Yu. N., Mamaev I. S. Chaplygin ball over a fixed sphere: An explicit integration // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 6, pp. 557–571.
- [2] Duistermaat J. J. Chaplygin's sphere. arXiv:math/0409019v1 [math.DS] 1 Sep 2004.
- [3] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
- [4] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтонизация неголономных систем в окрестности инвариантных многообразий // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 829–854 (см. также: Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonization of nonholonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 5, pp. 443–464.)

- [5] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, № 2(392), с. 71–132.
- [6] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы: Геометрия, топология, классификация: В 2-х тт. Ижевск: УдГУ, 1999. 444 с.; 448 с.
- [7] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Качение однородного шара по динамически несимметричной сфере // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 869–889 (*см. также*: Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Rolling of a homogeneous ball over a dynamically asymmetric sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 5, pp. 465–483.)
- [8] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Обобщение преобразования Чаплыгина и явное интегрирование шарового подвеса // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 313–338 (*см. также*: Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Generalized Chaplygin's transformation and explicit integration of a system with a spherical support // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 2, pp. 170–190.)
- [9] Борисов А. В., Мамаев И. С., Марихин В. Г. Явное интегрирование одной неголономной задачи // Докл. РАН, 2008, т. 422, № 4, с. 475–478.
- [10] Борисов А. В., Фёдоров Ю. Н. О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1995, № 6, с. 102–105 (*см. также*: Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 67–70).
- [11] Борисов А. В., Цыгвинцев А. В. Показатели Ковалевской и интегрируемые системы классической динамики: 1, 2 // Regul. Chaotic Dyn., 1996, vol. 1, no. 1, pp. 15–37.
- [12] Система Клебша. Разделение переменных, явное интегрирование?: Сб. ст. / А. В. Борисов, А. В. Цыганов. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2009. С. 7–20.
- [13] Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 704 с.
- [14] Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: ЛГУ, 1988. 200 с.
- [15] Цыганов А. В. Деформации канонической скобки Пуассона для неголономных систем Чаплыгина и Борисова–Мамаева–Фёдорова при нулевой константе площадей: 1 // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 577–599;
Цыганов А. В. О бигамильтоновой структуре систем Чаплыгина и Борисова–Мамаева–Фёдорова при нулевой константе площадей: 2 // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 43–55.
- [16] Цыганов А. В. О пуассоновых структурах, возникающих при рассмотрении шара Чаплыгина и его обобщений // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 345–353.
- [17] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 139–168 (*см. также*: Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. С. 76–101).

Topological analysis of one integrable system related to the rolling of a ball over a sphere

Alexey V. Borisov¹, Ivan S. Mamaev²

^{1,2}Institute of Computer Science;

Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles

Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

A. A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS

Bardina str. 4, Moscow, 117334, Russia

Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS

S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia

¹borisov@rcd.ru, ²mamaev@rcd.ru



A new integrable system describing the rolling of a rigid body with a spherical cavity over a spherical base is considered. Previously the authors found the separation of variables for this system at the zero level of a linear (in angular velocity) first integral, whereas in the general case it is not possible to separate the variables. In this paper we show that the foliation into invariant tori in this problem is equivalent to the corresponding foliation in the Clebsch integrable system in rigid body dynamics (for which no real separation of variables has been found either). In particular, a fixed point of focus type is possible for this system, which can serve as a topological obstacle to the real separation of variables.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 70H45

Keywords: integrable system, bifurcation diagram, conformally Hamiltonian system, bifurcation, Liouville foliation, critical periodic solution

Received November 16, 2012, accepted December 24, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 5, pp. 957–975 (Russian)